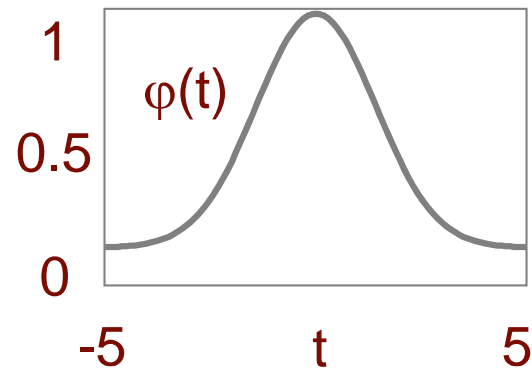
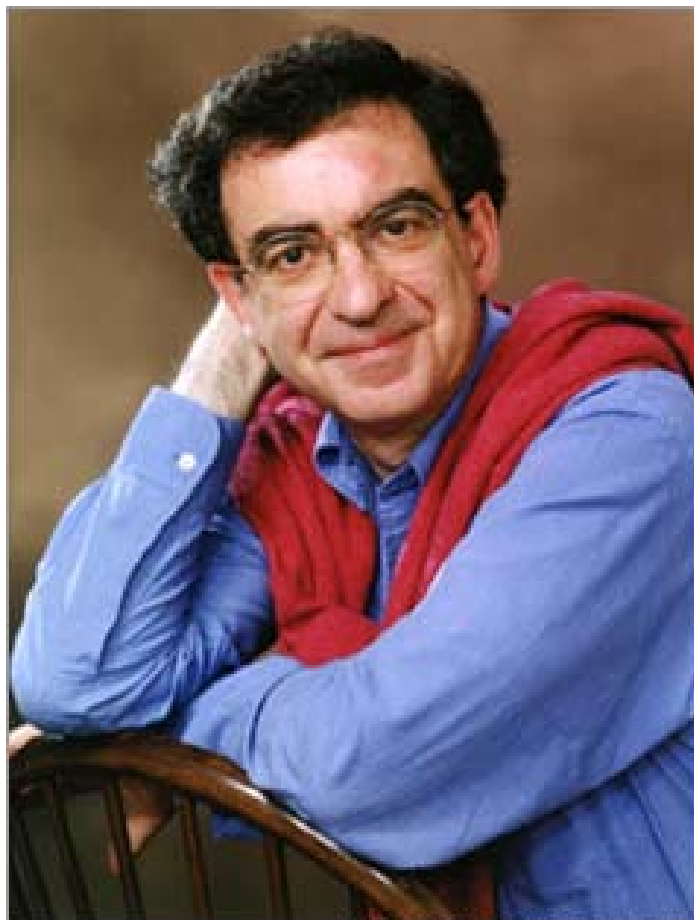


Radial Basis Functions



Tomaso Poggio

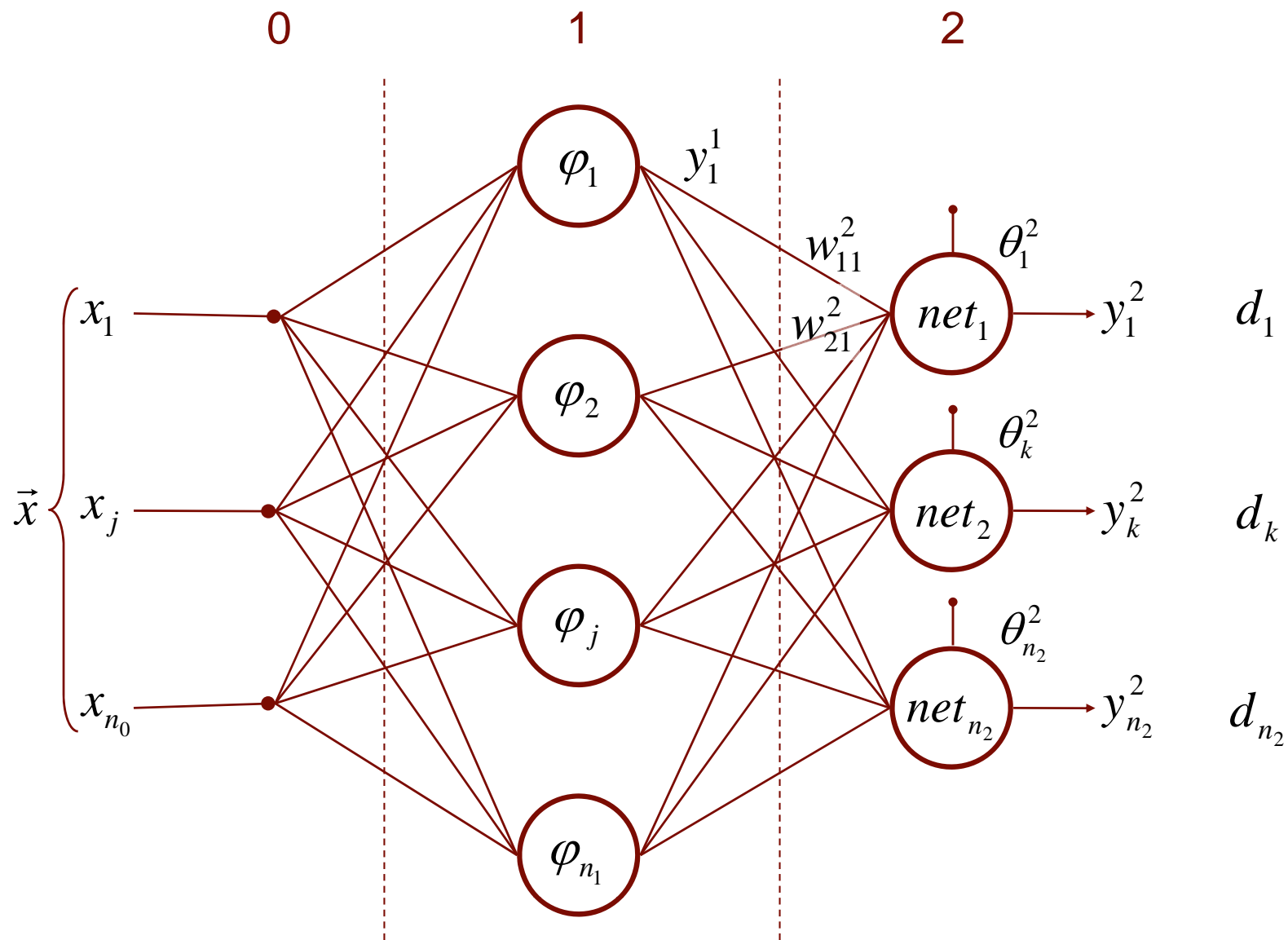


COURTESY: TOMASO POGGIO

RBF (Radial Basis Functions)

- Ciertas BNN (Biological Neural Networks) responden a entradas específicas.
- RBF → Respuesta Localmente Sintonizada. $\vec{\mu}_j$
- RBF son redes neurales adaptativas.
- Supervisada.

Arquitectura



- El nivel 1 no tiene pesos.

Propiedades de las RBF

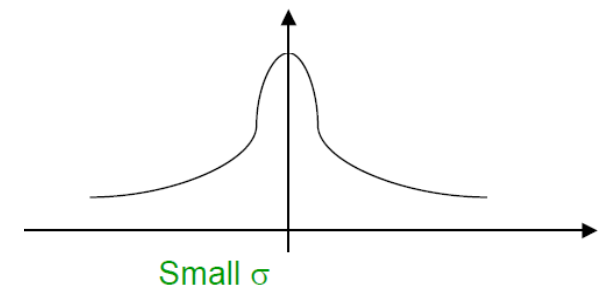
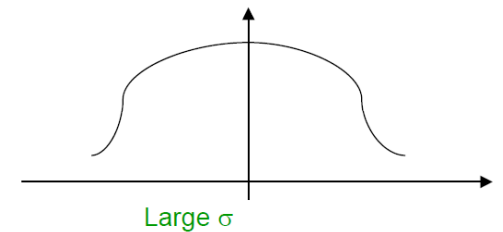
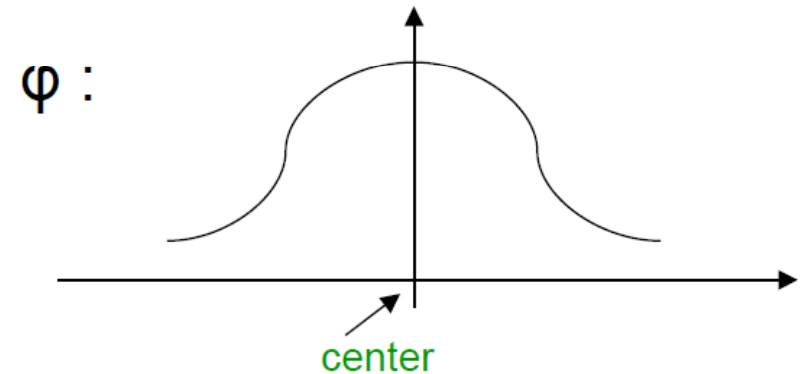
- y_j^1 calcula la proximidad de \vec{x} a $\vec{\mu}_j$

$$y_j^1(\vec{x}) = \varphi_j(\|\vec{x} - \vec{\mu}_j\|, \sigma_j)$$

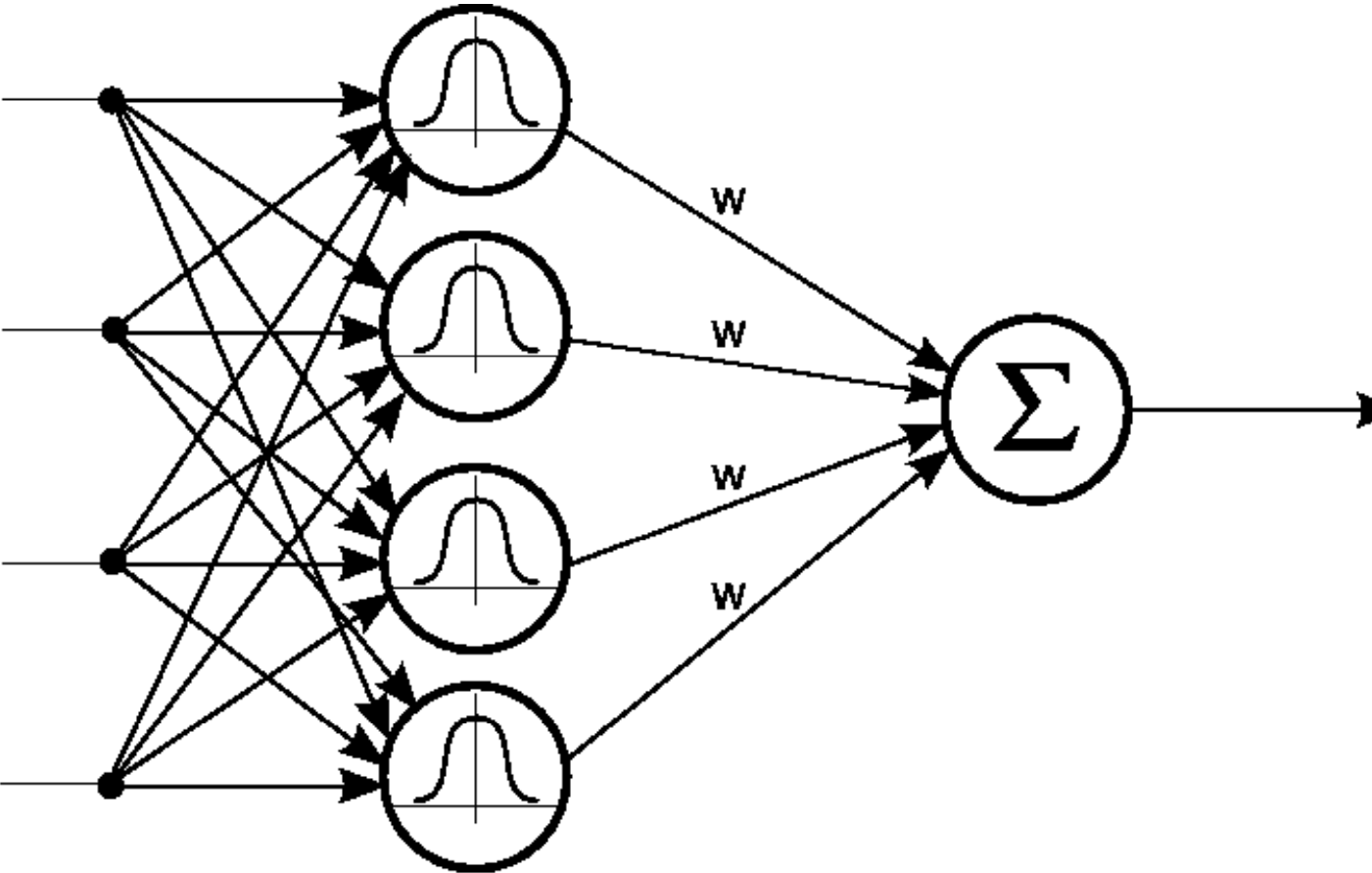
- φ_j es:

- Isotropía.
- Tiene un máximo en $\vec{\mu}_j$
- σ_j mide la anchura de campo receptivo.

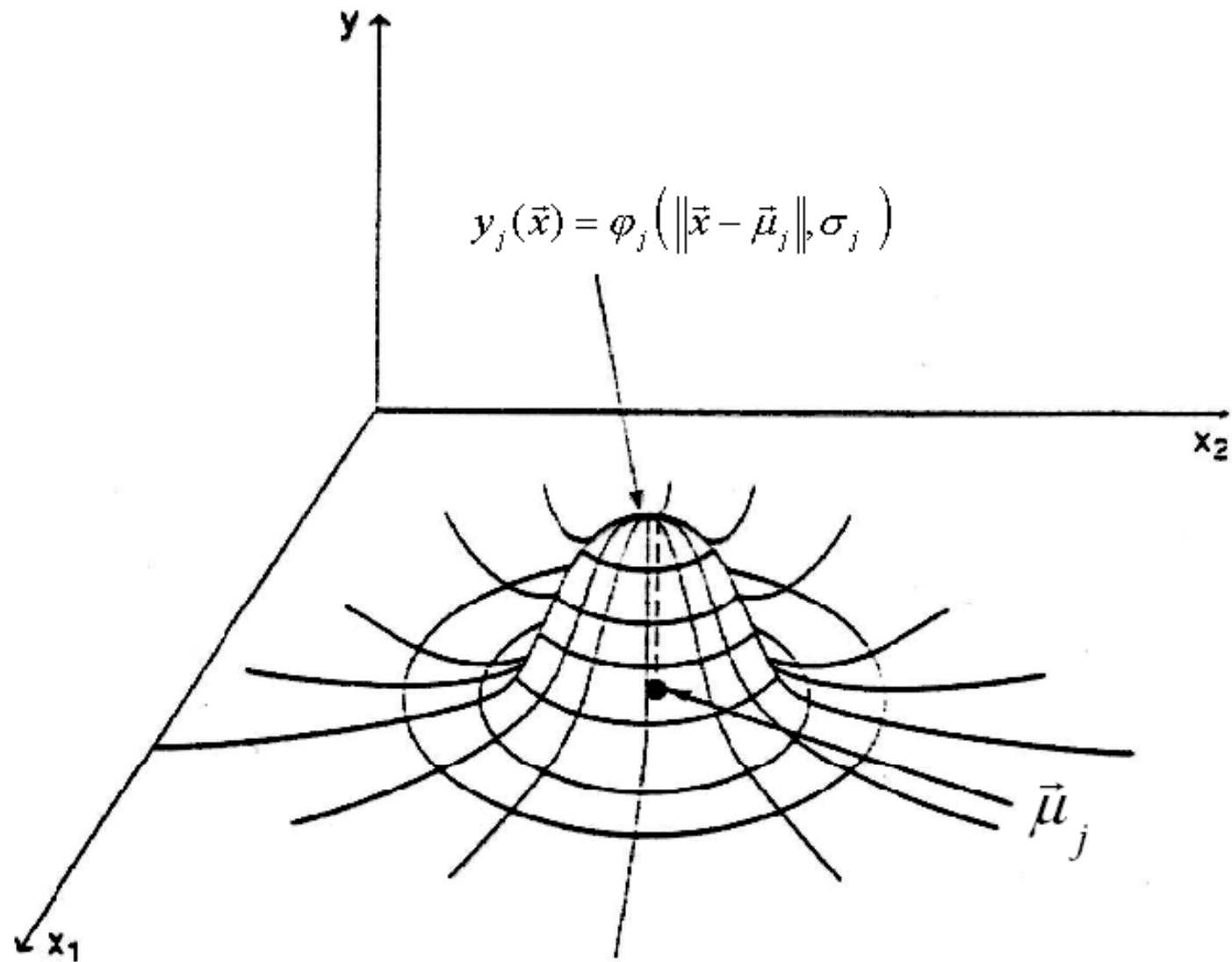
$$y_k^2(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n_1} w_{jk} y_j^1(\vec{x}) + \theta_k$$



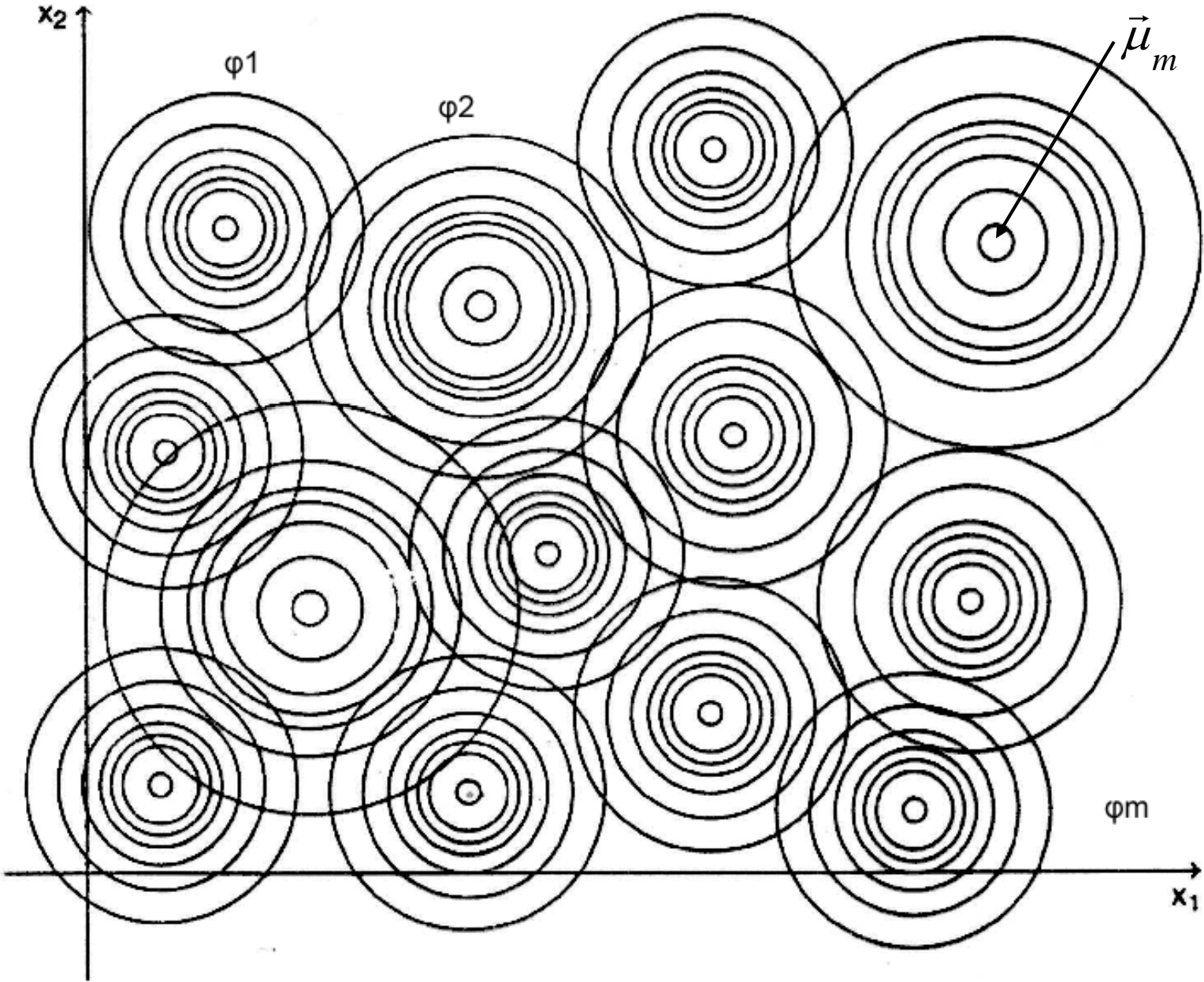
Radial Basis Functions



Radial Basis Functions



Radial Basis Functions



Radial Basis Functions

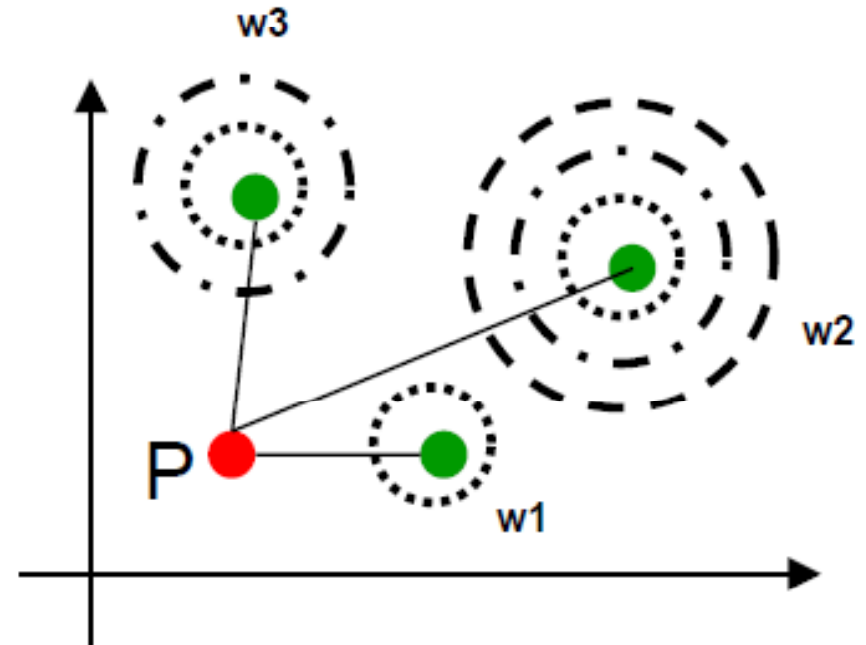
-El vector P se interpola utilizando 3 vectores:

- Cada vector contribuye a P
- La contribución depende de:
 - La distancia a P

$$y_j^1(\vec{x}) = \varphi_j\left(\|\vec{x} - \vec{\mu}_j\|, \sigma_j\right)$$

- El peso w

$$y_k^2(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n_1} w_{jk} y_j^1(\vec{x}) + \theta_k$$



$$w_1 < w_3 < w_2$$

Algoritmo Simple

1.- Dado $\{\vec{x}_i\}$ tomar un $\{\vec{\mu}_j\}$ tal que $\#\{\vec{\mu}_j\} \ll \#\{\vec{x}_i\}$

2.- Clasificar $\{\vec{x}_i\}$ según $\{\vec{\mu}_j\}$ por Kohonen.

3.- Hacer $\sigma_j = \min \|\vec{\mu}_j - \vec{\mu}_i\| \quad \forall i$

4.- Calcular

$$y_j^1(\vec{x}) = e^{-\frac{\|\vec{x} - \vec{\mu}_j\|^2}{2\sigma_j^2}}$$

5.- Calcular

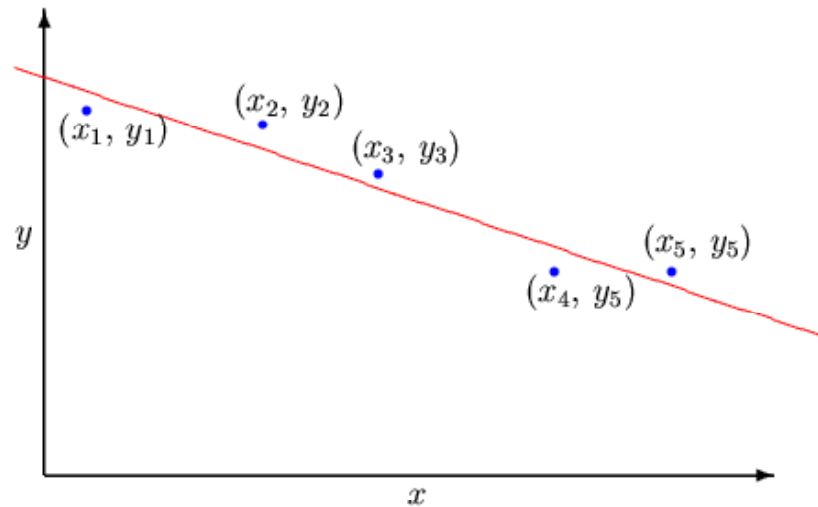
$$y_k^2(\vec{x}) = net_k = \sum_{j=1}^{n_1} w_{jk} \cdot y_j^1 + \theta_k = \sum_{j=0}^{n_1} \omega_{jk} y_j^1$$

6.- Actualizar los pesos

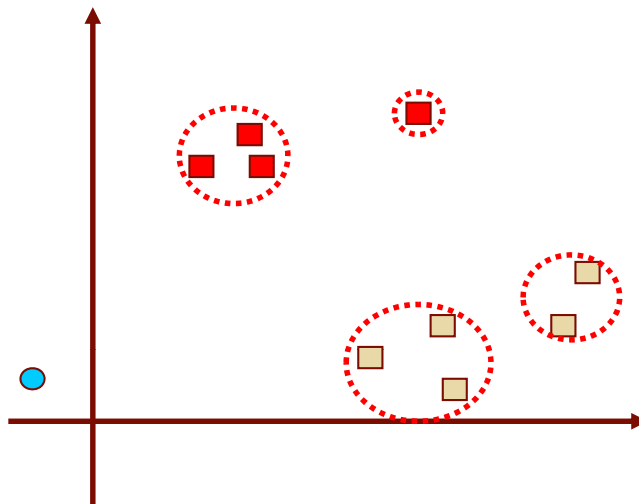
$$w_{jk}(t+1) = w_{jk}(t) + \mu(d_k - y_k^2)$$

RBF funciona como:

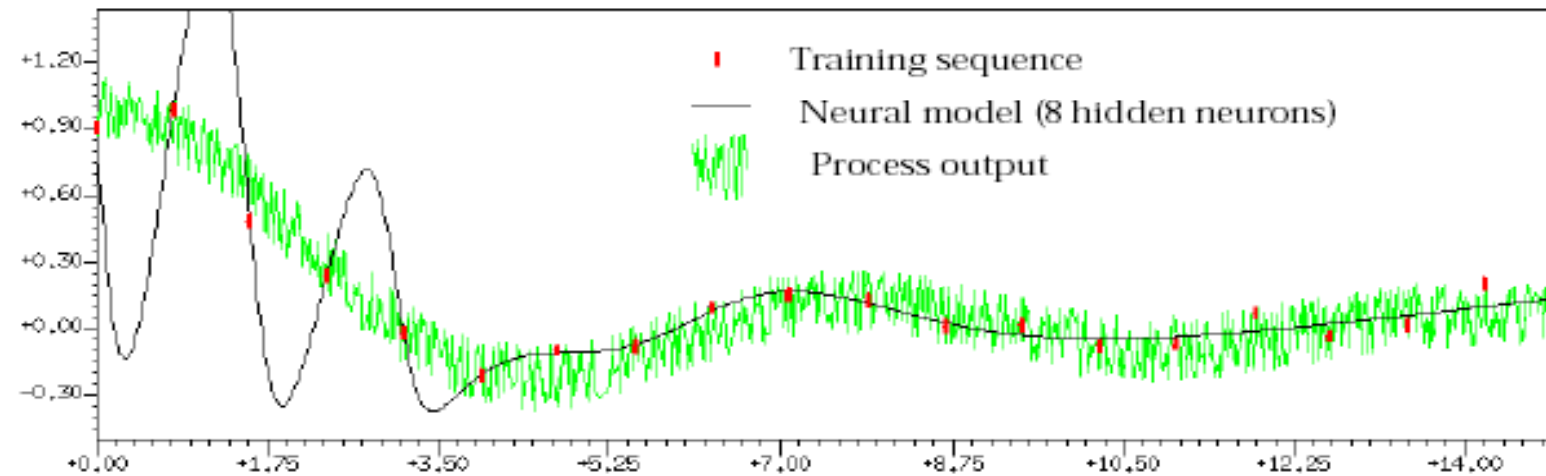
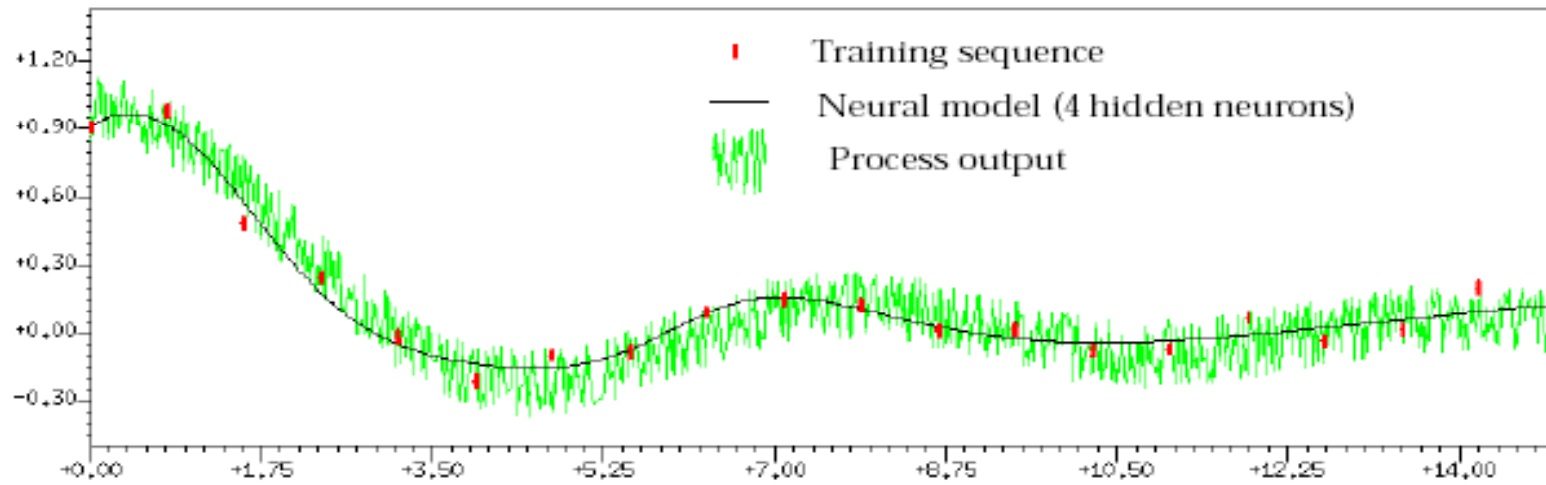
- Aproximador universal de funciones continuas. $f(\vec{x}) = \sum_j w_j \varphi_j(\|\vec{x} - \vec{\mu}_j\|, \sigma_j)$



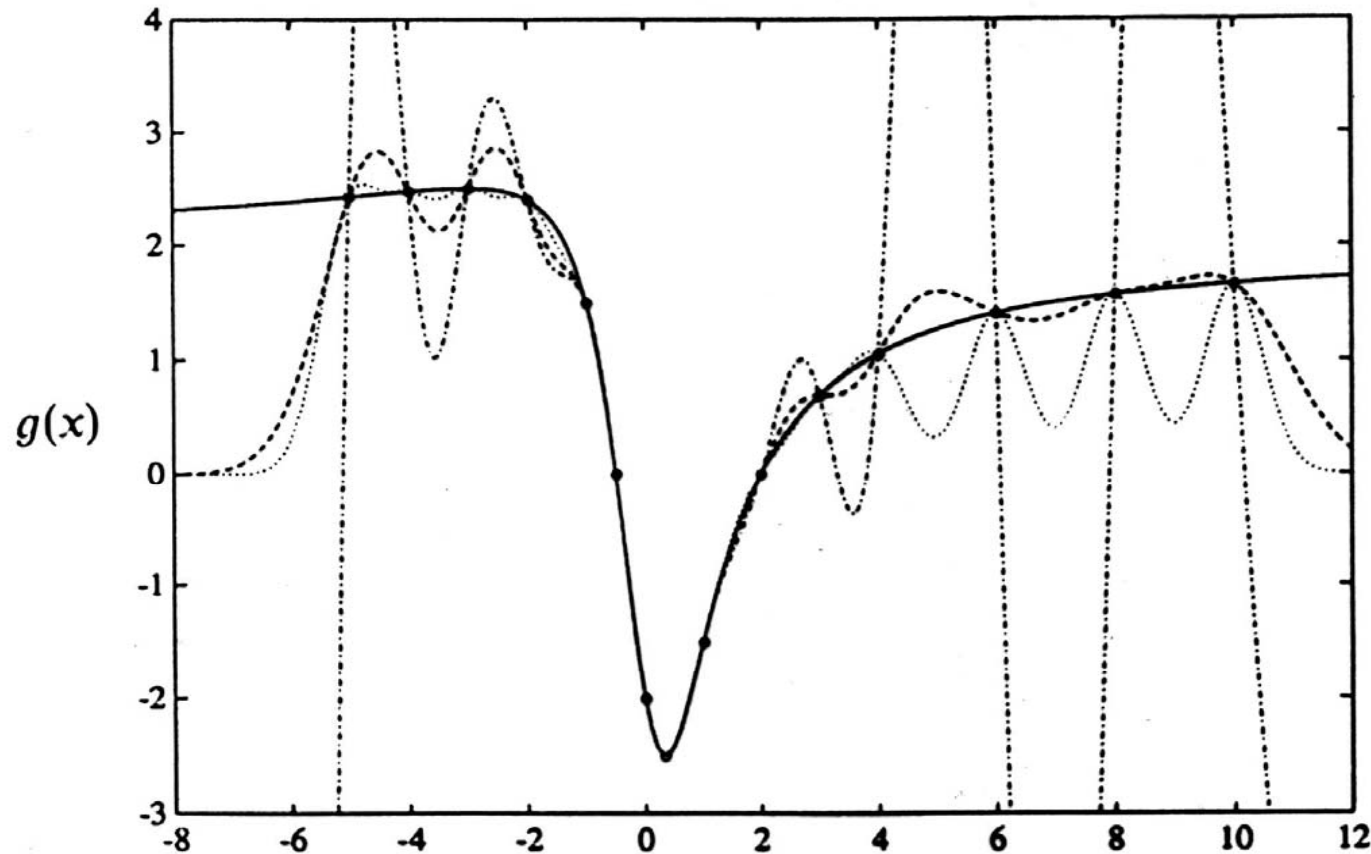
- Clasificador:



Interpolación con RBF

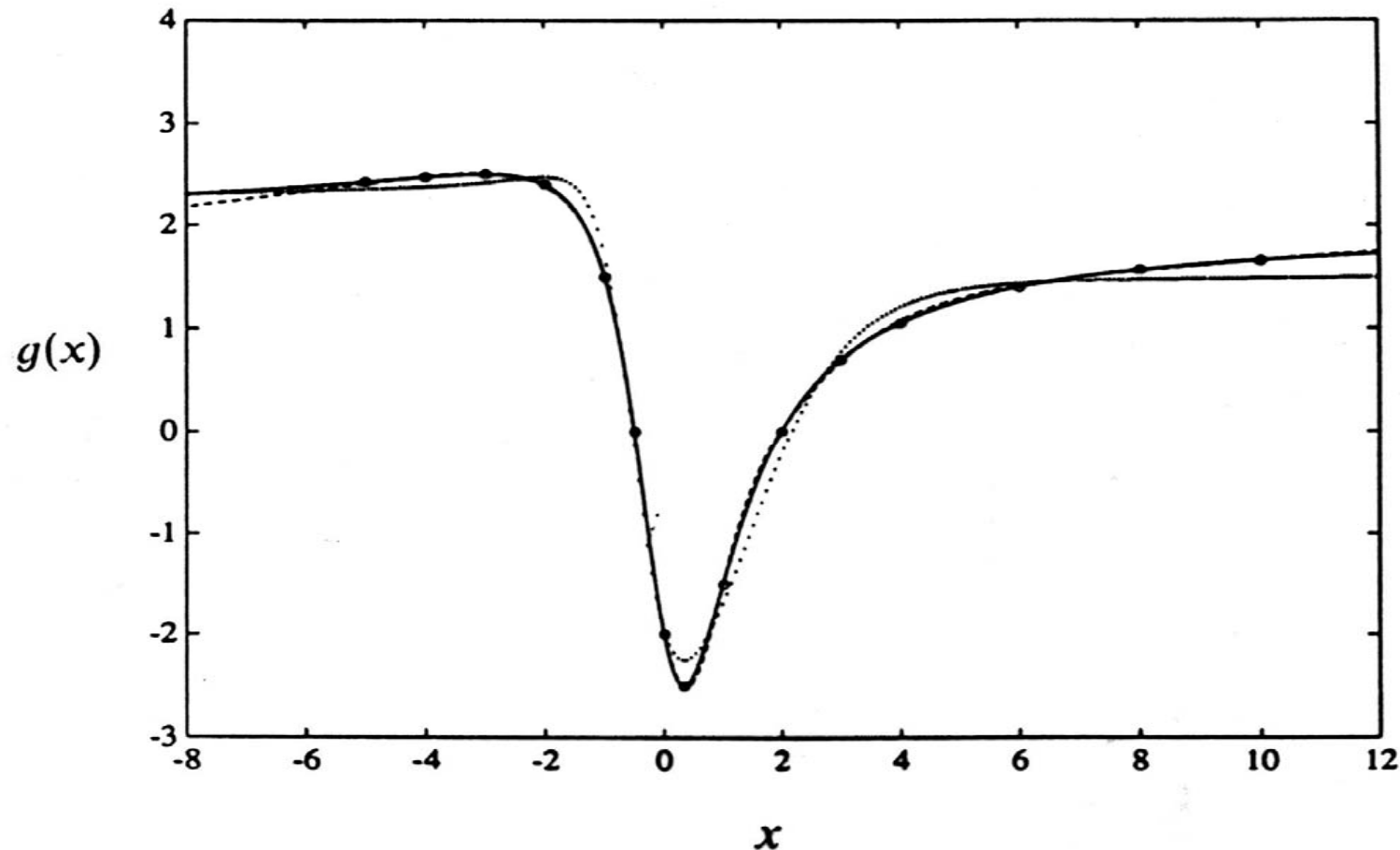


Interpolación con RBF



Aproximación de la función $g(x) = [(x - 2)(2x + 1)] / (1 + x^2)$ por una RBF (línea sólida), basada en interpolación estricta, utilizando 15 muestras (círculos). La red RBF usa 15 unidades Gaussianas ocultas, y su salida se muestra para tres anchuras de las unidades ocultas: $\sigma=0.5$ (·····), $\sigma=1.0$ (- - - - -), $\sigma=1.5$ (- · - · - ·).

Interpolación con MLP



Aproximación de la función $g(x) = \frac{(x-2)(2x+1)}{1+x^2}$ por una red neural (línea sólida). La línea punteada se obtuvo con una red feedforward de 3 capas ocultas. La línea rayada se generó utilizando una red feedforward de 12 capas ocultas.

RBF versus MLP en interpolaciones

RBF

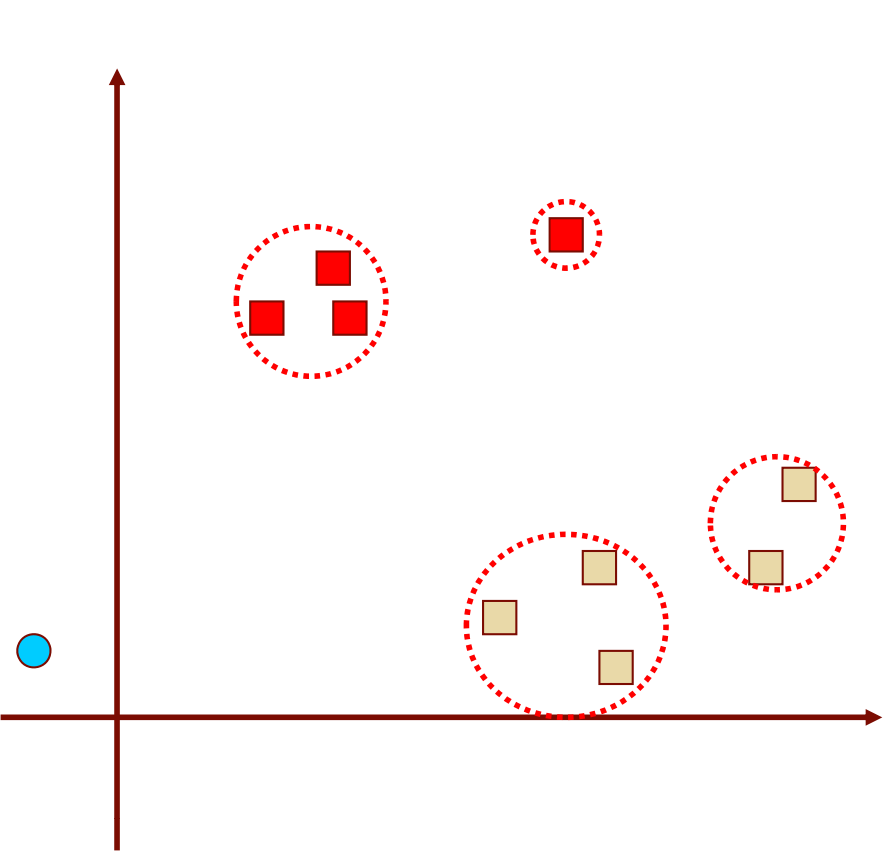
- Carácter local \Rightarrow Extrapola MAL.
- Interpola bien
- Si existen muchos datos \Rightarrow mejor RBF.
- + Simple
- Aprendizaje + rápido.

MLP

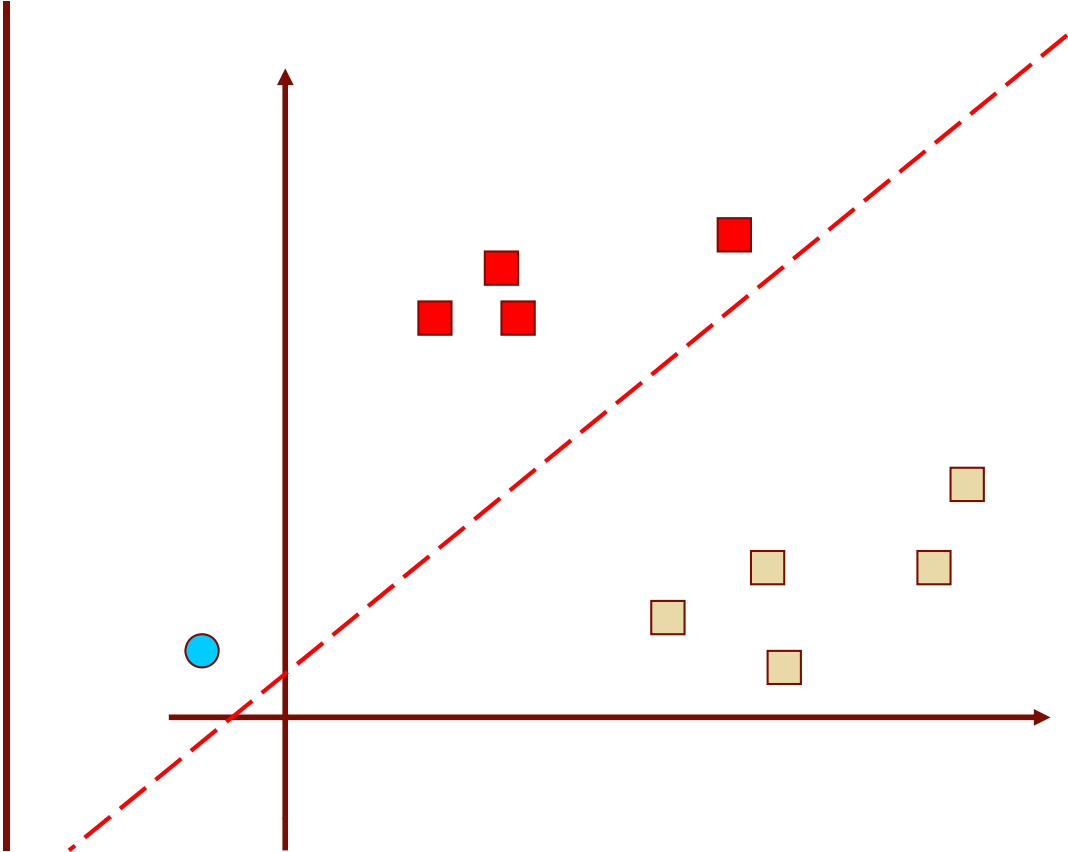
- Carácter global \Rightarrow Extrapola BIEN.
- Si existen pocos datos \Rightarrow mejor MLP.
- - Simple
- Aprendizaje + lento.

RBF versus MLP en clasificación

RBF



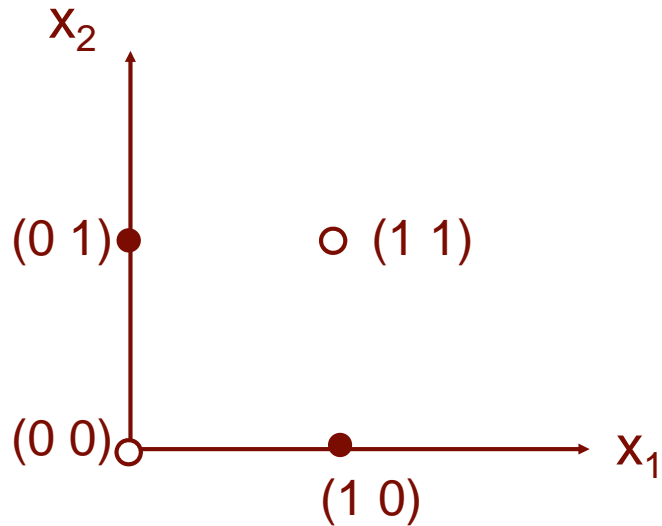
MLP



Ejemplo RBF como clasificador XOR

$$\varphi_1(\vec{x}) = e^{-\|\vec{x}-\vec{\mu}_1\|^2} \quad \vec{\mu}_1 = (1 \ 1)$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = e^{-\|\vec{x}-\vec{\mu}_2\|^2} \quad \vec{\mu}_2 = (0 \ 0)$$



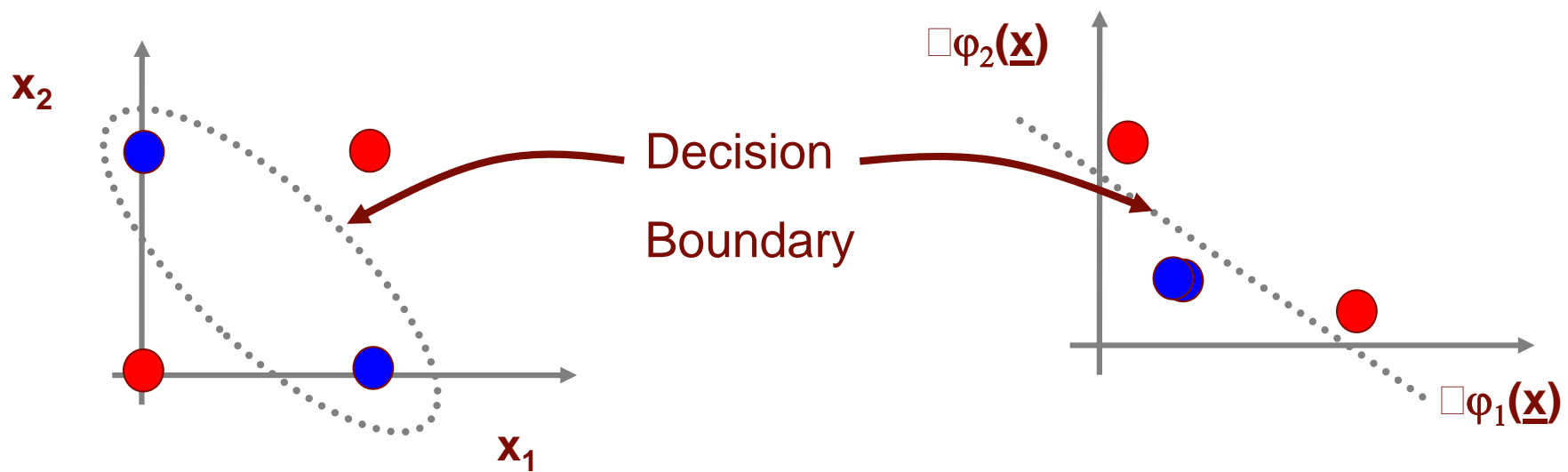
x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
11	1	0.135
01	0.367	0.367
00	0.135	1
10	0.367	0.367

Ejemplo RBF como clasificador XOR

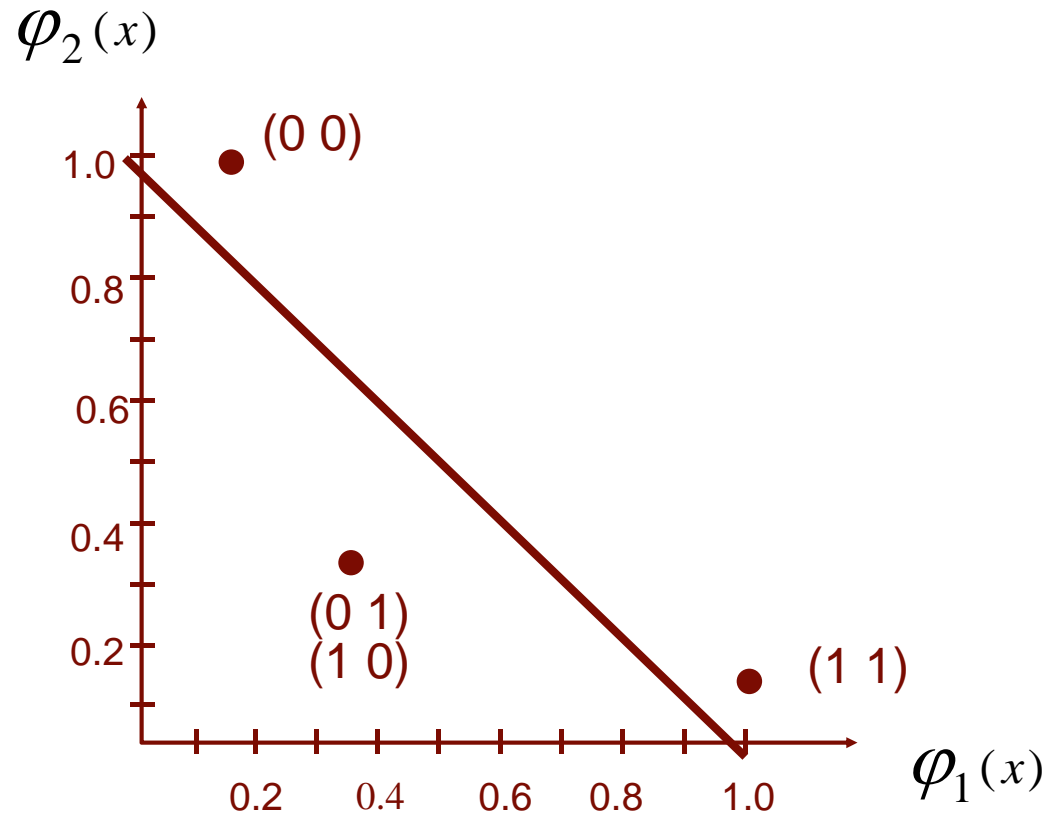
x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$\phi_1(\underline{x})$	$\phi_2(\underline{x})$	y'
0.13	1	0
0.36	0.36	1
0.36	0.36	1
1	0.13	0

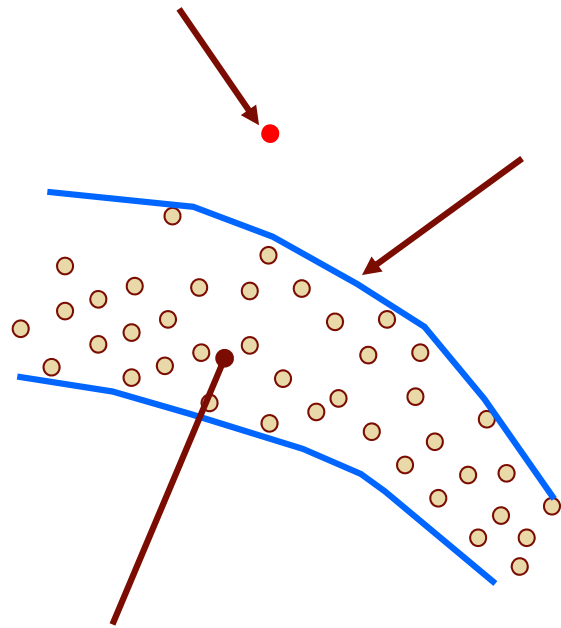


Ejemplo RBF como clasificador XOR



Un perceptrón puede acabar de clasificarlos ya que son linealmente separables.

Ejemplo RBF como clasificador de anomalías



Collected 'Nominal' Data

Idea: Theoretical boundary (multi-dimensional 'tube') that data should lie within:

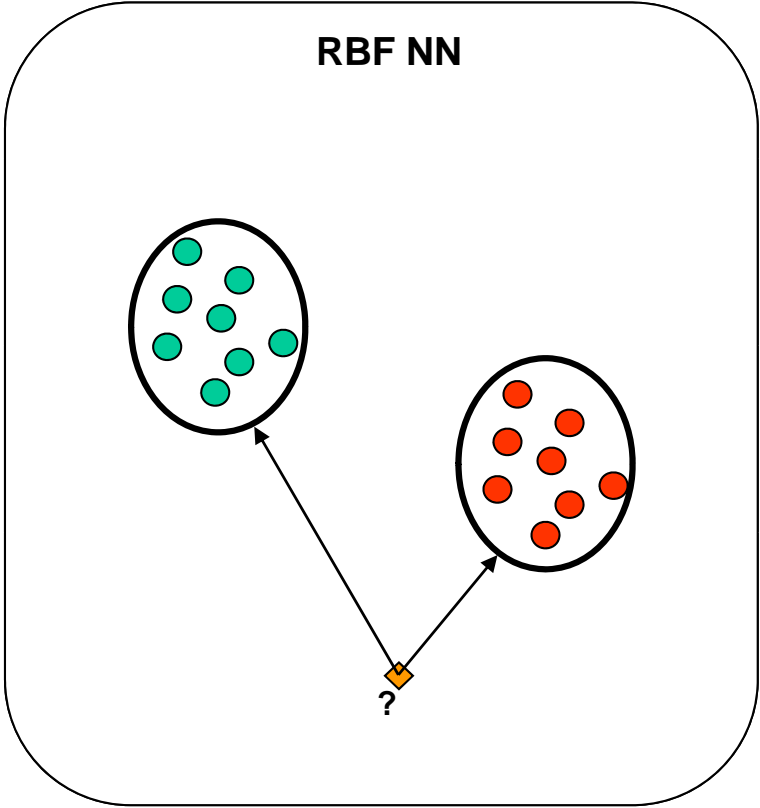
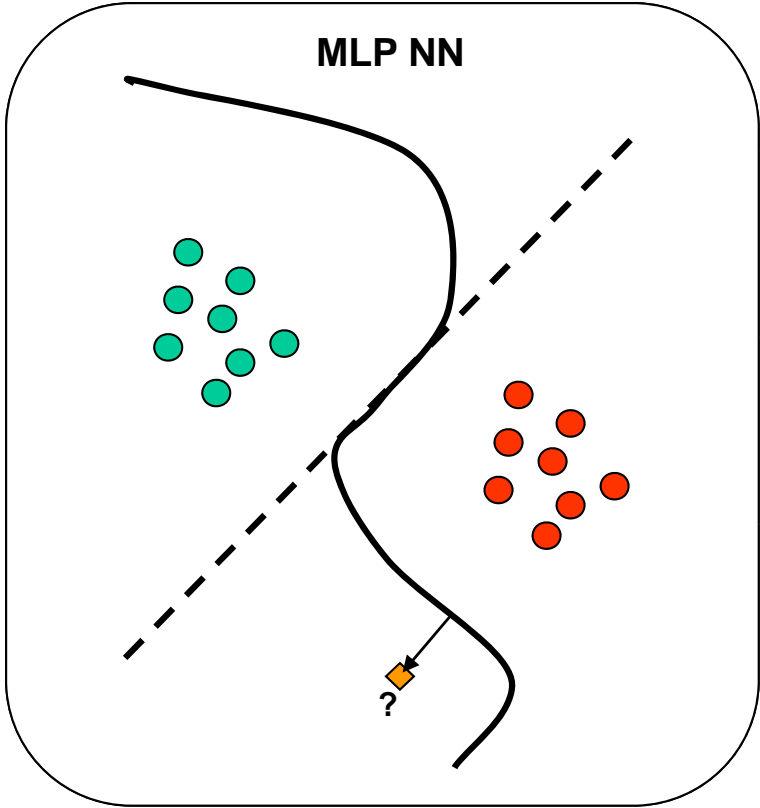
- Nominal data is inside the boundary
- Anomaly data is outside

Problem: How to estimate / approximate the boundary?

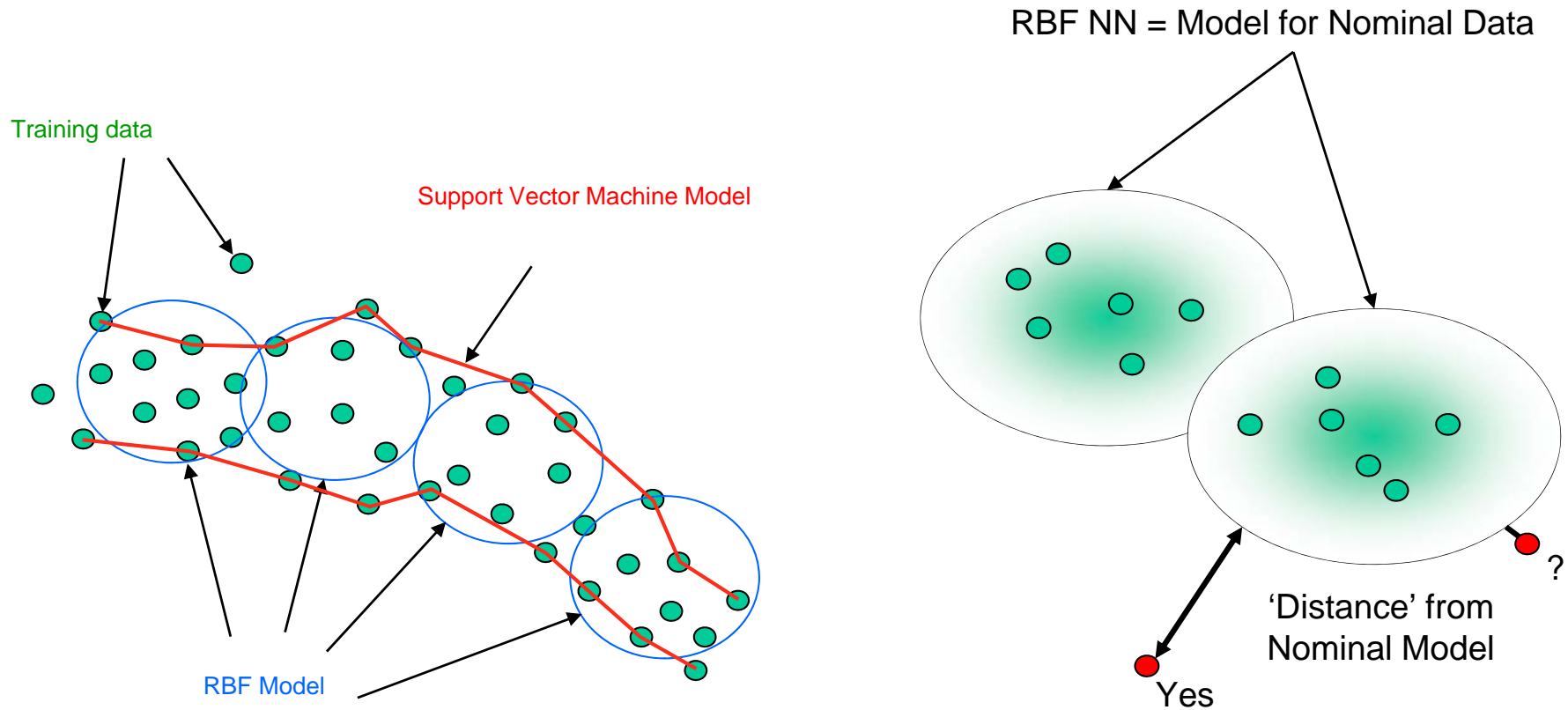
Problem: What measurement(s) caused the anomaly?

Problem: How far off-nominal is the anomaly / feature?

Ejemplo RBF como clasificador de anomalías



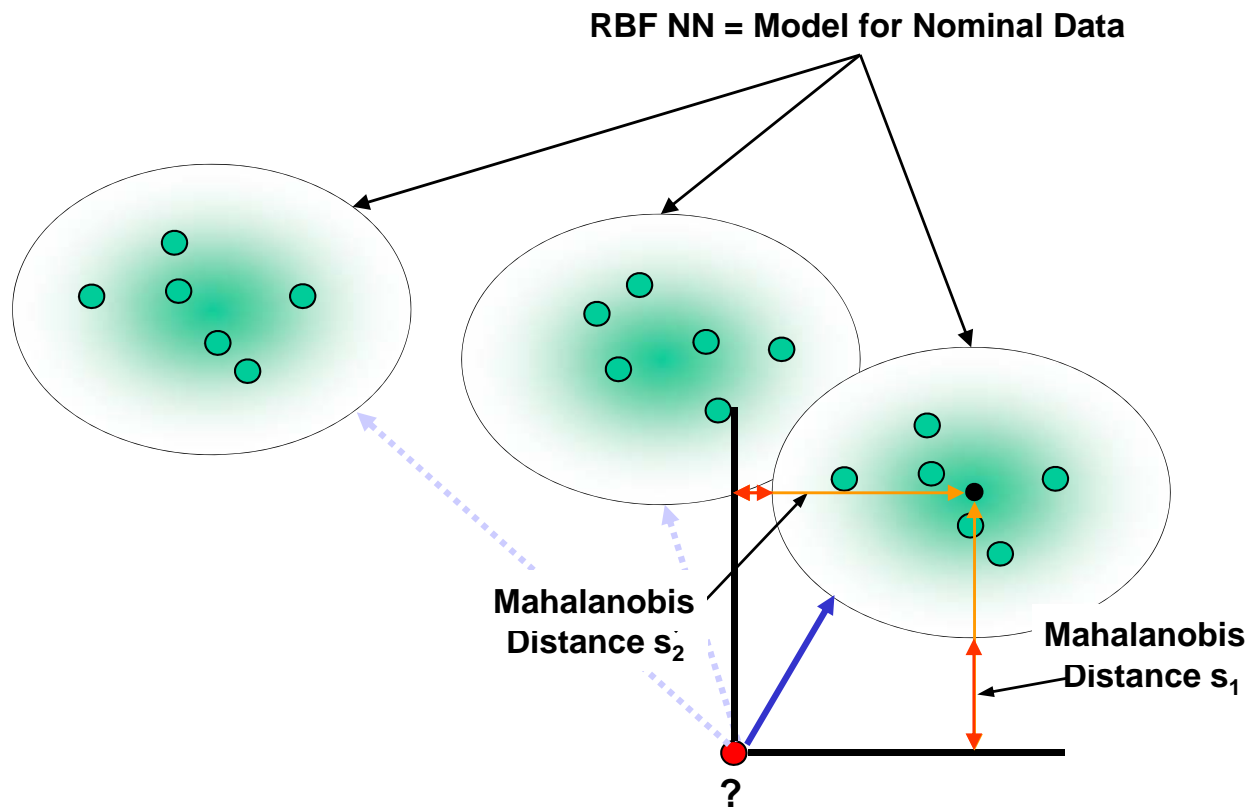
Ejemplo RBF como clasificador de anomalías



● = Sample of nominal data

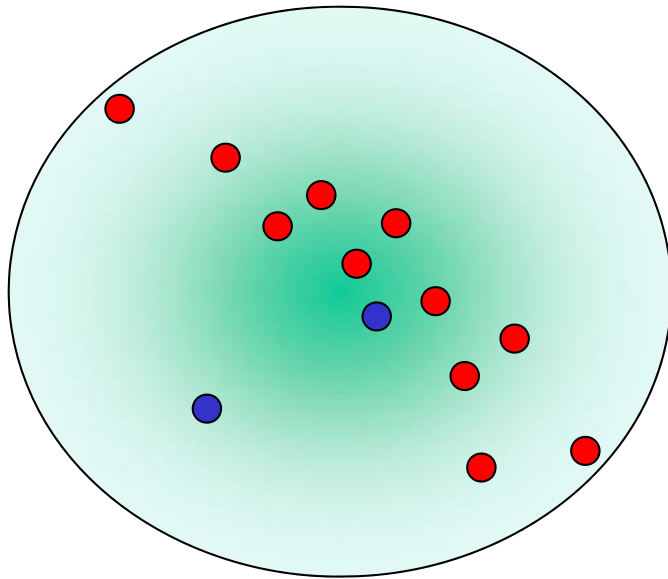
● = Sample of anomalous data

Ejemplo RBF como clasificador de anomalías



Ejemplo RBF como clasificador de anomalías

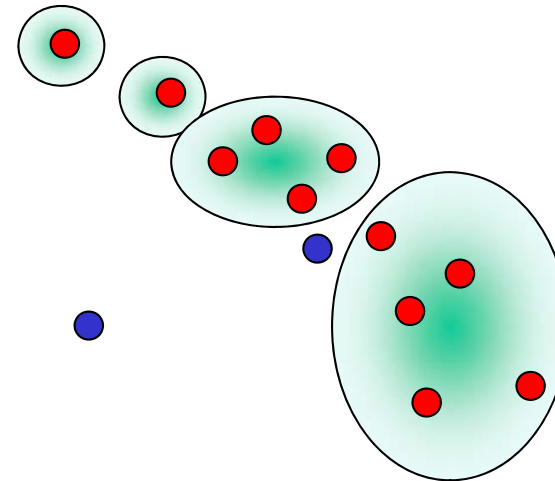
- Small number of clusters
 - Small number of basis units
 - Low False Alarms



- Very general
- Missed detections

Too General ?

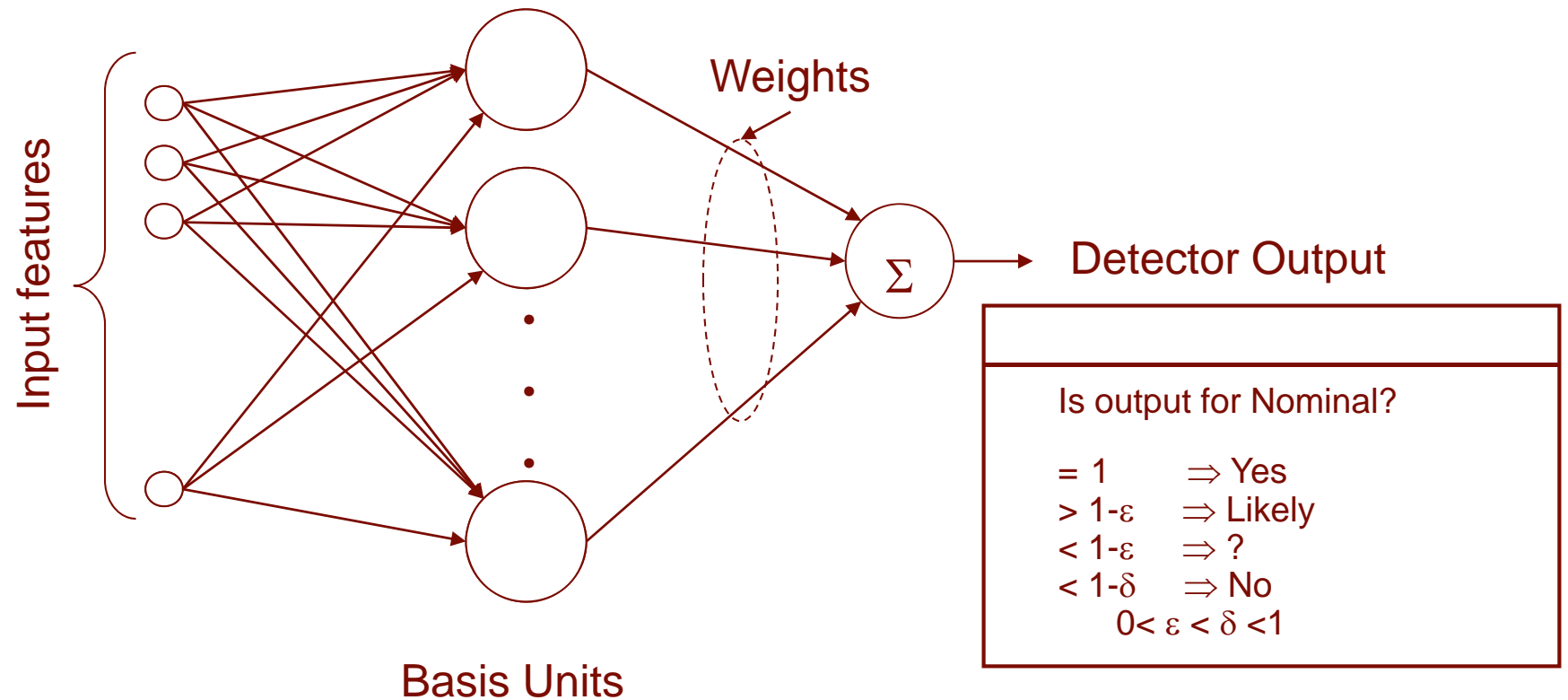
- Large number of clusters
 - Good 'tracking' of data dynamics
 - Large number of basis units



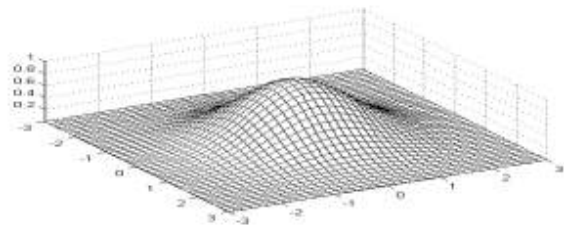
- More sensitive to outliers
- More false alarms

Over Trained ?

Ejemplo RBF como clasificador de anomalías

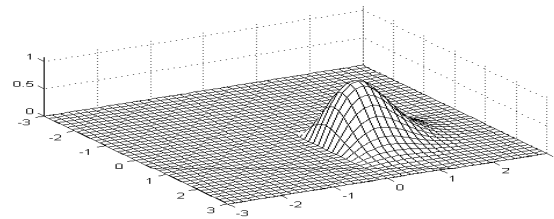


Gaussian elliptical basis function :



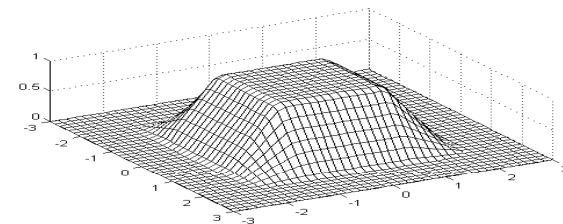
= Gaussian Mixture Model

Rayleigh basis function :



Good for magnitude spectral data

Fuzzy membership basis function :



For those who like things fuzzy

Radial Basis Functions

